RÉCRÉATIONS

MATHÉMATIQUES

PAR

ÉDOUARD LUCAS.

1891

SEPTIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DU BAGUENAUDIER.

A Monsieur le docteur O.-J. Broch, ancien ministre de Norwége, correspondant de l'Institut.

« Comment peut estre créance d'homme si legiere que telles baguenaudes soient prinses pour doctrine, ou telles superstitions pour vraye religion. »

(ALAIN CHARTIER.)

« Les hommes sont si nécessairement fous, que ce serait être fou par un autre tour de folie, de ne pas être fou. »

(PASCAL. — *Pensées.*)

« La science ne nous a pas encore appris si la folie est ou n'est pas le sublime de l'intelligence; si presque tout ce qui est la gloire, si tout ce qui est la profondeur, ne vient pas d'une maladie de la pensée. »

(EDGAR POË. — *Histoires extraordinaires.*)

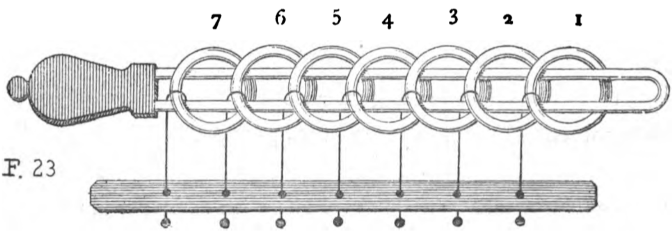
SEPTIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DU BAGUENAUDIER.

Le baguenaudier est un instrument de jeu, formé d'anneaux enchevêtrés dans une navette, qu'il s'agit de séparer du système des anneaux. Nous conseillons l'emploi du baguenaudier de 7, 8 ou 9 anneaux; on le trouve facilement dans le commerce. Avec un plus grand nombre d'anneaux. le jeu devient absurde, car le nombre des opérations à faire pour

Fig. 36.



monter ou pour démonter le baguenaudier double continuellement par l'addition d'un anneau; on verra plus loin qu'il faudrait des milliards de siècles pour démonter complètement un baguenaudier de 64 anneaux.

HISTORIQUE.

L'invention de ce jeu est fort ancienne; on le trouve mentionné pour la première fois, je crois, parmi l'un des 222 traités de Cardan, dans l'ouvrage intitulé : *De subtilitate libri XXI,* dont la première édition parut à Nuremberg en 1550; il existe plusieurs autres éditions de cet ouvrage, et notamment une traduction française publiée par Richard Leblanc (Paris, 1556, in-4), sous le titre : *Les livres d'Hieronymus Cardanus, de la Subtilité et subtiles Inventions, ensemble les causes occultes et les raisons d'icelles.* Le XV^e Livre de cet ouvrage, que l'on doit considérer comme une sorte d'encyclopédie de la science et de l'industrie au XVI^e siècle, est consacré aux *Subtilités inutiles et incertaines;* nous reproduisons ici la traduction du passage concernant la description du baguenaudier, d'après Richard Leblanc (p. 291) :

« L'instrument, composé de sept anneaus, est inutile et est tel : Une paillette de fer large d'un doigt, longue d'une paume, mince et déliée, en laquelle sont sept trous rons, estrois et d'espaces égales, disposés selon la longueur de la paillette ou lamine : ces trous reçoivent sept vergettes menues presque de la hauteur d'une once, mobiles en bas, circonflexes en haut, à fin qu'elles retiennent les anneaus enclos de la grandeur d'un doigt, et les vergettes sont contenues par l'anneau ensuivant sous le fléchissement et curvature. Pour cette cause, tous les anneaus, excepté le premier, sont engardés par le précédent, qui ne sautent librement hors la verge antérieure : tout est de fer, et mesmement la navette ou navicule est de fer, de laquelle i'ai exactement rendu la figure que voiés présente. Elle est longue et large selon la grandeur de la paillette ou lamine supposée. Par cet instrument un ieu est inventé de subtilité admirable. »

Après l'indication de la manœuvre de l'appareil, on trouve la conclusion suivante : « Ceci de soi est inutile; toutefois on peut le transférer aux serrures artificieuses de coffres ([1]). Telle subtilité est au ieu des échets; mais elle est plus délectable pour cause de la variété et contention; car, comme la navicule est d'invention très subtile en son genre, ainsi entre tous ieus les échets sont de grande subtilité. Autrefois, i'ai écrit et composé quatre livres des ieux. »

BIOGRAPHIE DE CARDAN.

La vie de Jérôme Cardan est l'une des plus étranges et des plus extraordinaires dont il soit fait mention dans l'histoire des sciences; c'est un tissu d'extravagances, d'actions incohérentes, viles et parfois criminelles, puisqu'il en vint à assassiner un homme qui l'avait volé au jeu. Scaliger a dit de lui qu'il était supérieur à tous les hommes, mais que souvent il descendait plus bas que les petits enfants; Leibniz, qui l'a déclaré fou et insensé, n'en admirait pas moins la supériorité de son esprit.

L'un des premiers, Cardan trouva la résolution de l'équation du

([1]) M. le docteur O.-J. Broch, président de la commission du royaume de Norwége à l'Exposition universelle de 1878, m'a dit que, dans son pays, les habitants des campagnes se servent encore du baguenaudier pour fermer leurs bahuts et leurs sacs.

troisième degré et démontra la formule qui porte encore son nom ; il entrevit la résolution de l'équation du quatrième degré, que l'on doit à son disciple Ferrari ; il imagina un appareil employé dans la marine pour la suspension des boussoles, et probablement aussi l'engrenage connu sous le nom de *joint universel.*

Né à Pavie, en 1501, il professa successivement la dialectique, la métaphysique, les mathématiques ; il exerça la médecine à Milan, de 1529 à 1550 ; après avoir parcouru l'Écosse, l'Angleterre, les Pays-Bas et l'Allemagne, il revint à Milan, où il vécut encore quelques années, partageant son temps entre le travail, la débauche et le jeu. Son fils aîné, médecin comme lui, empoisonna sa femme, et fut décapité ; son second fils tomba dans de grands désordres ; il le fit incarcérer plusieurs fois, puis lui coupa l'oreille et finalement le chassa de sa maison. Enfin il termina son existence infortunée, à Rome, à l'âge de soixante-quinze ans ; il était alors pensionné par le pape Grégoire XIII. Scaliger et de Thou prétendent qu'ayant fixé lui-même l'année et le jour de sa mort, il se laissa mourir de faim pour que sa prédiction fût justifiée. La *Nouvelle Biographie générale* (Firmin Didot) contient une longue et intéressante biographie de Cardan, par M. Victorien Sardou, de laquelle nous avons extrait quelques-uns des renseignements qui précèdent.

BIOGRAPHIE DE WALLIS.

Le second auteur qui a écrit sur le baguenaudier est un illustre mathématicien anglais, du nom de Wallis, auquel on doit une formule bien curieuse pour la détermination du rapport de la circonférence au diamètre ([1]). Né en 1616, mort en 1703, Wallis possédait à fond toutes les connaissances de son temps. « Dès mon enfance, dit-il, j'ai toujours, dans toutes sortes de sciences, voulu savoir le fond des choses, non par routine, ce qui les fait oublier bientôt, mais par raison et par principes, afin de former mon jugement. » Il fut professeur de géométrie à l'Université d'Oxford, en 1649; il fut ensuite chapelain du roi, au rétablissement des Stuarts. Doué d'une mémoire prodigieuse, il lui arriva, une nuit, d'extraire de tête la racine carrée d'un nombre de *cinquante* chiffres, et de la dicter le lendemain.

Le tome II de son *Traité d'Algèbre* (p. 472) contient la description et la manœuvre du baguenaudier, avec un grand luxe de détails et de figures très bien faites.

([1]) Au Congrès de l'Association française, à Montpellier, M. Éd. Collignon, inspecteur général des Ponts et Chaussées, a présenté des développements fort curieux sur la formule de Wallis, afin d'arriver à démontrer l'incommensurabilité de toutes les puissances du rapport de la circonférence au diamètre.

C'est un préjugé, partagé par beaucoup de personnes, de croire à l'impossibilité démontrée de la quadrature du cercle. On sait bien que les nombres π et π^2 sont incommensurables; cependant si l'un des nombres π^4, π^8, π^{16},... était commensurable, on aurait résolu le problème de la quadrature du cercle. Cette observation n'a pas pour but d'engager quelques lecteurs dans cette recherche extrêmement difficile. Arago disait autrefois à l'Académie des Sciences qu'il avait constaté que les prétendues solutions de la quadrature du cercle étaient beaucoup plus nombreuses au printemps qu'à toute autre époque de l'année (*Voir* le tome II, p. 156.)

« Cardan, dit-il, en son livre *de la Subtilité*, parle de ce que nous allons faire connaître sur les anneaux enlacés; il classe cette subtilité parmi les inutiles, c'est-à-dire parmi celles qui ne touchent pas au gain, et qui se recommandent seulement comme pouvant mettre l'esprit en action; mais il en parle en termes si obscurs, que celui qui ne connaîtrait pas autrement la chose ne pourrait que difficilement deviner de quoi il s'agit. Nous nous sommes efforcé d'expliquer par des paroles l'objet en question; mais il serait plus facile de le faire connaître avec les doigts qu'avec la plume. La chose est d'une si grande subtilité et va si bien de pair avec l'Algèbre, qu'il est impossible de lui refuser ici un refuge. Toute la difficulté consiste à composer et à résoudre, à enlacer et à délacer.

« Il m'est impossible de dire quelle est l'ancienneté de cet objet; certainement on le connaissait avant Cardan, car cet auteur n'en parle pas comme d'une invention à lui propre. »

IMAGINATION D'UN CLERC DE NOTAIRE.

Ozanam, dans ses *Récréations mathématiques*, ne parle pas du baguenaudier; l'*Encyclopédie méthodique, dictionnaire des jeux*, en fait mention, mais c'est pour le placer après le jeu : *J'aime mon amant par B*, et pour décrire la suite des changements que l'on fait en démontant le baguenaudier quand tous les anneaux sont élevés, et en le ramenant à cet état.

Enfin, en 1872, un auteur ingénieux, qui avait gardé l'anonyme, a publié une brochure de seize pages in-8°, dont je dois la communication à la bienveillance de M. le général Parmentier. Cet opuscule intitulé: *Théorie du Baguenodier, par un clerc de notaire lyonnais* ([1]), commence ainsi : « Lyon attire sur lui l'attention publique par son Exposition; chacun des enfants de cette grande cité doit produire tout ce qui peut plaire aux visiteurs. Ce motif décide un modeste clerc de notaire à publier ses études sur le baguenodier; le sujet est frivole, mais la théorie est neuve; de plus, elle a été imaginée à Lyon. Cet opuscule aura atteint son but s'il montre que le baguenodier est un jouet instructif. »

L'auteur se livre d'abord à une discussion étymologique, de laquelle il paraît résulter que l'on doit écrire le nom de l'instrument avec un *o*, puisque ce nom vient probablement de nœud (*nodus*) de bagues. Après avoir indiqué les sources historiques que nous venons de mentionner, il expose une notation aussi simple qu'élégante des diverses configurations du baguenaudier, qui permet de fixer à chaque instant l'ordre du déplacement des anneaux; aussi nous regrettions que l'auteur n'eût pas cru devoir livrer son nom au public, lorsque nous avons appris que l'estimable continuateur de Cardan et de Wallis est M. Louis Gros, conseiller à la cour d'appel de Lyon. La théorie qui va suivre n'est que le développement de l'idée fondamentale de l'auteur lyonnais et des observations qui nous ont été communiquées par M. Parmentier; nous y avons ajouté quelques considérations qui feront comprendre que ce petit appareil, que bien des personnes regardent comme un joujou, renferme cependant, dans sa contexture variable à chaque instant, la représentation des diffé-

([1]) Lyon, imprimerie d'Aimé Vingtrinier, rue Belle-Cordière.

rentes propriétés du système de la numération binaire et de la théorie des combinaisons.

DISCUSSION ÉTYMOLOGIQUE DE M. GROS.

« Au lieu de décrire longuement un objet qui est dans le commerce, rassurons le lecteur, déjà choqué de l'orthographe que j'ai adoptée : *baguenodier,* et non *baguenAudier.* Je ne suis pas un libre penseur, pas plus en orthographe qu'en religion et en politique; je me soumets à toutes les autorités légitimes, surtout à celle de l'Académie française.

« Cependant, j'ai un grain d'indépendance, et, quand je vois un mot orthographié d'une manière compliquée et contraire à l'étymologie, je propose une réforme.

« Quelle est la véritable étymologie du mot baguenodier? Consultons Ménage; il ne dit pas un mot du jouet dont nous nous occupons; mais il a des articles sur *bague*, *baguenaude*, *baguenauder*, *baguenaudier.*

« Il fait dériver *bague* de *bacca*, *que les Latins ont dit d'une perle, à cause de la ressemblance qu'ont les perles pour leur rondeur avec les bacques ou baies.*

« Les annotateurs de Ménage ne sont point satisfaits de cette explication; ils remarquent que *bague* ne vient point de *bacca*; ni une baie, ni une perle ne ressemblent à une bague.

« Ils font venir *bague* de la langue des Francs, de celle des Goths, de celle des Cimbres et de celle des Saxons; ils trouvent des mots analogues dans l'anglo-saxon, dans le vieux franc, dans l'allemand, dans l'irlandais, dans le suédois et dans l'anglais.

« Ces estimables annotateurs vivaient à une époque où le sanscrit n'était pas étudié; ne pourrait-on pas, à présent, trouver la racine primitive dans la langue sacrée des Indous, puisqu'elle est la mère de toutes les anciennes langues européennes?

« *Baguenaude,* fruit, et *baguenaudier,* arbuste, dérivent, suivant Caseneuve, de *bacca, qui est proprement le fruit rond de certains arbres, tels que sont le laurier, le lierre, le myrte et le houx; ce nom a été donné au baguenaudier à cause du petit fruit rond contenu dans sa cosse.*

« Ménage dit que de *bacca* on a fait *baccana, baccanalda, baccanaldarius.*

« Les annotateurs ne trouvent rien à redire à cela; je suis plus difficile qu'eux : la graine du *colutea,* pour parler le langage officiel moderne, ne ressemble point à celle du lierre et du houx; elle a la forme allongée d'un très petit haricot.

« Ce sont les mots extrêmement usuels qui se transforment beaucoup dans le langage; or, je ne crois pas que l'on ait jamais eu à parler souvent des grains renfermés dans les petites vessies du *colutea* et à leur donner trois noms successifs ou simultanés.

« Un glossaire de Rabelais fait dériver *baguenaude, futilité,* de *bague,* et *nade* (*nulle bague*).

« Ces conjectures n'ont point de fondements; j'ai d'autres idées, et les voici :

« Le baguenodier est un jeu très ancien; nous verrons bientôt que ce n'était pas une nouveauté il y a trois cents ans; on a dû lui donner un nom; celui qui s'est présenté tout naturellement est *nœud de bagues;* ce sont, en effet, des anneaux qui retiennent la navette par une certaine combinaison, comme deux brins de fil sont unis par une certaine manière de les contourner.

« Le mot *bague*, dans le sens d'*anneau*, était dans la langue depuis longtemps; en y joignant le mot *nodus*, ou son dérivé français nœud (avec *œ* en souvenir de l'*o* de *nodus*), on a fait *baguenodier*.

« Celui qui voit un homme sérieux passer de longs moments à élever et baisser les anneaux du baguenodier est invinciblement porté à dire : « En voilà un qui perd son temps; » de là s'occuper du nœud de bagues, *baguenoder* a pris la signification que nous connaissons bien.

« Faire éclater entre ses doigts le fruit du *colutea* est un plaisir champêtre auquel s'attache aussi forcément l'idée de perte de temps sans profit; on a donc employé dans cette circonstance le mot *baguenoder*, fait pour le nœud de bagues, et, par suite, l'arbuste a reçu le nom du jouet.

« Pourquoi a-t-on écrit *baguenauder* et non *baguenoder?* Il y a trois ou quatre cents ans, l'orthographe n'avait rien de fixe; chaque auteur avait la sienne, et même beaucoup d'auteurs ne s'occupaient point de ce détail : ils s'en rapportaient aux imprimeurs; Montaigne dit qu'il se contentait de recommander l'emploi de l'orthographe la plus ancienne dans l'impression de ses *Essais* (Livre III, Ch. IX). Tantôt on compliquait l'orthographe, comme lorsque d'*homo* on a fait *homme;* tantôt on la simplifiait, comme lorsque d'*auris* on a fait *oreille,* et d'*audere*, *oser*. Baguenoder a eu la mauvaise chance d'être compliqué d'un *au*; puis, pour justifier cet *au*, l'abbé Ménage a imaginé *baccana*, *baccanalda*, *baccanaldarius*.

« Ami lecteur, j'espère que, cela dit, vous me pardonnerez de ramener le mot *baguenodier* à l'orthographe étymologique. »

DESCRIPTION DU BAGUENAUDIER.

Cet instrument (*fig.* 36) se compose de deux parties principales : la *navette* et le *système des anneaux.*

La navette se compose essentiellement d'un fil métallique, ayant la forme d'un rectangle très allongé. Pour la commodité de la manœuvre, l'une des extrémités est munie d'une poignée, que l'on tient dans la main gauche pendant que l'on déplace les anneaux avec la main droite.

Le système des anneaux est formé :

1° D'un nombre quelconque d'anneaux égaux, dont le diamètre est à peu près le double de la largeur de la navette, et dont l'épaisseur est environ le quart de celle-ci; par conséquent, on peut faire passer la navette à travers l'anneau, tout aussi bien qu'un seul anneau, et même deux pris ensemble, à travers la navette ;

2° D'une petite planchette rectangulaire de dimensions pareilles à celles de la navette ; elle est percée, sur sa longueur, de trous équidistants, en nombre égal à celui des anneaux de l'instrument;

3° De petites tiges ou verges métalliques, en nombre égal à celui des anneaux; l'une des extrémités de chaque tige passe librement dans l'un des trous de la planchette, derrière laquelle cette tige est retenue par un crochet; l'autre extrémité entoure l'un des anneaux.

Le système est agencé de telle sorte que chacune des tiges qui retient l'anneau se trouve passée dans l'intérieur de l'anneau suivant. Ainsi la tige du *premier anneau* est passée dans le deuxième ;

celle du deuxième dans le troisième, et ainsi de suite ; mais la tige du *dernier anneau* ne passe dans aucun autre. Il y a donc une très grande différence dans la disposition du premier anneau et du dernier ; dorénavant, nous distinguerons les anneaux par les nombres 1,2,3,4,..., et nous supposerons la planchette disposée de telle sorte que le premier anneau soit placé à la droite.

On dit qu'un anneau est *monté* ou *levé* lorsque la tige qui lui correspond est passée dans l'intérieur de la navette, et que la navette est passée dans l'intérieur de l'anneau ; on dit que l'anneau est *baissé* ou *descendu*, dans le cas contraire ; le baguenaudier est *monté*, lorsque tous ses anneaux sont levés ; il est *démonté*, lorsque tous ses anneaux sont baissés ; alors la navette se trouve complètement séparée du système des anneaux.

DU DÉPLACEMENT D'UN ANNEAU.

Supposons que l'on tienne horizontalement, et de la main gauche, la navette du baguenaudier complètement monté, ainsi qu'on le vend dans le commerce ; il est facile de constater que le premier anneau peut être baissé ; pour cela, on le prend de la main droite, on tire la navette à gauche, et l'on passe l'anneau dans l'intérieur de la navette ; de cette façon le premier anneau se trouve baissé ; on le remonte par l'opération inverse. Lorsque le premier anneau est baissé, on ne peut déplacer le second, et on ne peut baisser que le troisième, ou le remonter par l'opération inverse ; mais si le premier et le troisième anneau sont baissés, on ne peut en baisser aucun autre.

Dans le cas général, il résulte de la construction même du baguenaudier, que le déplacement d'un seul anneau est soumis aux principes suivants :

1° Dans une position quelconque des anneaux du baguenaudier, on peut toujours baisser le premier anneau s'il est levé, ou le lever s'il est baissé.

2° Pour qu'un anneau de rang quelconque puisse être déplacé, c'est-à-dire levé ou baissé, il faut et il suffit qu'il se trouve placé *immédiatement* à la gauche d'un anneau monté, et que celui-ci soit le seul anneau monté à la droite de l'anneau considéré.

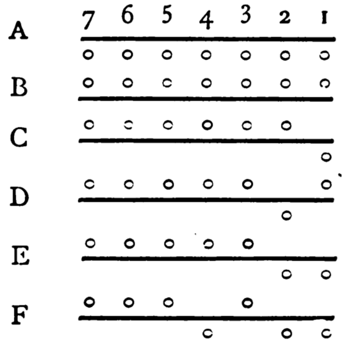
Dans le cas où l'on ne déplace qu'un seul anneau à la fois, la marche du jeu est appelée *marche ordinaire*.

DU DÉPLACEMENT DE DEUX ANNEAUX.

Il y a exception, dans le déplacement des anneaux, pour la marche des deux premiers anneaux, qui peuvent être montés ou descendus, pris simultanément ; mais il n'existe aucun groupe de deux autres anneaux, ou de plus de deux anneaux, que l'on puisse faire marcher en même temps. Lorsque l'on emploie cette manœuvre simultanée des deux premiers anneaux, la marche du jeu est plus rapide; nous l'appellerons *marche accélérée*. On peut monter ou baisser simultanément les deux premiers anneaux dans une position quelconque des autres anneaux de l'appareil ; mais on verra facilement que si l'on doit les monter tous deux en même temps, on descend ensuite le premier. Dans ce qui suit, nous ne nous occuperons tout d'abord que de la marche ordinaire, qui est plus commode à considérer théoriquement ; nous donne-rons ensuite un tableau qui permet d'en conclure immédiatement la théorie du jeu dans sa marche accélérée.

Pour représenter les diverses phases du jeu, nous figurerons la navette par une droite horizontale, les anneaux levés par des ronds placés au-dessus, dans leur situation respective, et les anneaux baissés, par des ronds placés au-dessous. Ainsi (*fig.* 37).

Fig. 37.



A désigne le baguenaudier de 7 anneaux, complètement démonté; B désigne le même appareil entièrement monté. Par un seul mouvement, on peut déduire C ou D de B, soit en baissant le premier anneau, soit en baissant le second; on peut aussi déduire E de B par un seul mouvement, en baissant simultanément les deux premiers anneaux; on peut aussi déduire E de D par le déplacement du premier anneau, toujours libre; mais on ne pourrait déduire immédiatement E de C. Ces observations s'appliquent encore, quelles que soient les positions des anneaux 4, 5, 6 et 7.

Dans la position C, on ne peut baisser que le troisième anneau;

de même, dans la position E, on ne peut baisser que le quatrième, pour produire la position F. Dans celle-ci, si l'on veut baisser le troisième anneau, il faut d'abord remonter les deux premiers, puis baisser le premier pour descendre le troisième.

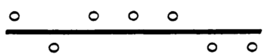
PROBLÈME GÉNÉRAL DU BAGUENAUDIER.

Cela posé, le problème général que nous allons résoudre est le suivant : *On donne deux dispositions quelconques des anneaux, sur la navette d'un baguenaudier de grandeur arbitraire ; déterminer l'ordre et le nombre des déplacements à opérer, pour passer d'une disposition à l'autre, en supposant que le nombre des mouvements des anneaux soit le plus petit possible. En particulier, déterminer l'ordre et le nombre minimum des déplacements des anneaux, pour monter ou pour démonter entièrement le baguenaudier.*

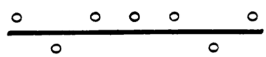
Nous supposerons d'abord qu'il s'agisse de la marche ordinaire en ne déplaçant qu'un seul anneau à la fois. Le problème général du baguenaudier se résout immédiatement au moyen de la notation ingénieuse de chacune des dispositions du baguenaudier, qui a été imaginée par l'auteur lyonnais. Tous les anneaux sont représentés, dans l'ordre de gauche à droite, par l'un des caractères **0** et **1**, avec les conventions suivantes. Le premier anneau levé, à partir de la gauche, est désigné par **1**, et les anneaux levés, situés à droite, sont alternativement représentés par **0** et **1**, sans tenir compte, dans cette alternance, des anneaux baissés ; quant aux anneaux baissés, ils sont indiqués, à leurs places respectives, par le signe du premier anneau levé à leur gauche, et par 0, lorsqu'il ne s'en trouve aucun. En d'autres termes, en allant de gauche à droite, tout anneau levé implique une *variation* du signe de l'anneau, levé ou baissé, à gauche ; tout anneau baissé implique une *permanence* du signe de l'anneau à gauche. On trouvera plus loin le tableau des coups successifs du baguenaudier avec la figuration ordinaire dans la colonne *Baguenaudes*, et la notation de M. Gros dans la colonne *Binaires*.

MARCHE ORDINAIRE.

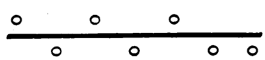
La notation du baguenaudier, que nous venons d'exposer, représente un nombre écrit dans le système de numération binaire. Considérons une position quelconque du baguenaudier :

 **1 1 0 1 0 0 0**;

dans cette position, on peut passer à deux autres : la première, en élevant le premier anneau, à la droite, ce qui donne

 **1 1 0 1 0 0 1**;

la seconde, en baissant le quatrième anneau, ce qui donne

 **1 1 0 0 1 1 1**.

Dans le premier déplacement, on a augmenté la notation correspondante du système binaire d'une unité ; dans le second, on a diminué cette notation d'une unité. Il en est de même pour toute disposition des anneaux. Par conséquent, la marche ordinaire du baguenaudier correspond exactement à la formation successive de tous les nombres écrits dans la numération binaire; on monte le baguenaudier, en formant les nombres successivement à partir de zéro ; on démonte le baguenaudier, en suivant l'ordre décroissant des nombres entiers. D'ailleurs, on observera que pour monter le baguenaudier il suffit de déplacer, en commençant par la droite, le premier anneau représenté par **0**; pour le démonter, au contraire, il faut déplacer le premier anneau à droite représenté par le chiffre **1**.

Pour résoudre le problème général que nous avons posé, c'est-à-dire pour passer d'une disposition quelconque à une autre, on écrit les deux dispositions dans le système binaire, on prend la différence ; puis on transforme ce nombre dans le système décimal; on obtient ainsi le nombre minimum de déplacements pour passer de l'une à l'autre position. On effectuera ce changement en montant ou en démontant le baguenaudier, suivant que le premier nombre de la notation est plus petit ou plus grand que le second.

NOMBRE DES COUPS DE NAVETTE.

Il est facile, d'après cela, de déterminer le nombre des coups dans la marche complète du baguenaudier de 7 anneaux. Lorsque tous les anneaux sont montés, on a pour la notation

1 0 1 0 1 0 1,

ou, dans le système décimal,

$$2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 85.$$

Donc, il faut opérer 85 déplacements pour monter ou pour démonter le baguenaudier de sept anneaux, dans la marche ordinaire. De même, pour le baguenaudier de dix anneaux, il faut 682 coups de navette, puisque l'on a

$$2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2 = 682.$$

En général, si l'on désigne par P_n le nombre des déplacements nécessaires pour monter ou pour démonter le baguenaudier de n anneaux, on a, pour n pair égal à $2k$,

$$P_{2k} = 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \ldots + 2^3 + 2 = \frac{2^{2k+1} - 2}{3},$$

et pour n impair égal à $2k + 1$,

$$P_{2k+1} = 2^{2k} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^2 + 1 = \frac{2^{2k+2} - 1}{3}.$$

On peut réunir ces deux formules en une seule, en disant que P_n est toujours égal au plus grand nombre entier contenu dans le tiers de 2^{n+1}.

Nous donnons, dans le tableau qui termine cette récréation, la figuration des seize premiers coups ascendants du baguenaudier de 5, 6 ou 7 anneaux; la colonne n indique la succession des coups dans la marche ordinaire, le tableau contient aussi la figuration des quinze derniers coups du baguenaudier de 7 anneaux; on observera, en effet, que, bien que le baguenaudier soit monté par 85 changements, on peut encore *compliquer l'état de situation* des anneaux jusqu'au 127e coup, pour se préparer à monter le huitième anneau comme s'il existait. C'est à cette différence entre le baguenaudier monté et le baguenaudier plus compliqué, que l'on doit attribuer la divergence des calculs des trois auteurs qui ont écrit sur cet instrument. En général, pour arriver à l'état le plus compliqué du baguenaudier de n anneaux dans la marche ordinaire, il faut un nombre de dérangements égal au nombre formé par n unités dans le système binaire, c'est-à-dire $2^n - 1$.

Ce nombre est précisément le total des combinaisons de n objets pris un à un, deux à deux, ..., n à n, de telle sorte que ce jeu donne la représentation de toutes les combinaisons, sans répétition, des n objets, ainsi que l'ordre dans lequel on doit numéroter les combinaisons.

SUR LES COMBINAISONS

En général, on sait que l'on appelle combinaisons simples, ou sans répétition, de n lettres prises p à p, toutes les dispositions de p lettres qui ne diffèrent que par le choix des objets, et non par l'ordre dans lequel ils sont placés. On désigne habituellement ce nombre par $C_{n,p}$, et l'on a

$$1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n} = 2^n.$$

Dans les cours d'algèbre, on démontre ce théorème par la formule du binôme de Newton, qui donne le développement de $(x+1)^n$, en supposant ensuite x égal à l'unité. Cependant ce théorème sur les combinaisons paraît avoir été connu bien avant la formule du binôme; voici la démonstration donnée par les anciens auteurs; elle repose sur l'idée fondamentale qui préside à l'accroissement des sciences mathématiques, c'est-à-dire sur l'observation et sur l'induction.

Prenons, par exemple, quatre lettres a, b, c, d; formons toutes les combinaisons possibles de ces quatre lettres; ajoutons-y l'unité; nous avons le tableau suivant :

1,
a, *b*, *c*, *d*,
ab, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*,
abc, *abd*, *acd*, *bcd*,
abcd.

Le nombre total des combinaisons est 2^4; prenons maintenant une cinquième lettre *e*; formons un nouveau tableau en ajoutant cette lettre à toutes les combinaisons du tableau précédent, nous avons, en plus,

e,
ae, *be*, *ce*, *de*,
abe, *ace*, *ade*, *bce*, *bde*, *cde*,
abce, *abde*, *acde*, *bcde*,
abcde.

Le nombre des combinaisons possibles de cinq lettres est le double de celui de quatre lettres ou 2^5, et ainsi de suite. On retranche ensuite l'unité du tableau.

DURÉE DE LA MANŒUVRE.

Depuis la publication, dans la *Revue scientifique*, de notre article sur le baguenaudier, nous avons reçu de M. L. Gros une lettre intéressante, de laquelle nous extrairons le passage suivant : « Je regrette de n'avoir pas indiqué, dans ma théorie, le temps qui est nécessaire pour monter ou démonter le baguenodier. Je l'ai fait dans une note très réduite que je n'ai pas publiée. Je vais vous donner ces indications dont vous pourrez tirer parti, si vous les trouvez bonnes.

« Le baguenodier est toujours livré avec un nombre impair d'anneaux. Cela est utile à ceux qui savent que, pour démonter le baguenodier dont tous les anneaux sont élevés, il faut commencer par abaisser le premier, puis le troisième anneau. Celui qui n'est pas averti abaisse les deux premiers anneaux, puis le quatrième; il s'éloigne de son but et il tend vers l'état extrême, où la navette ne contient que la verge du dernier anneau.

« Combien faut-il de temps pour monter ou démonter le baguenodier? On fait sans peine 64 changements par minute : en se hâtant beaucoup, on peut arriver à 80. Mais admettons 64 comme un nombre moyen :

5	anneaux tous élevés	exigent		21	changements, soit	20^s;
7	—	—	—	85	—	$1^m 20^s$;
9	—	—	—	341	—	$5^m 20^s$;
11	—	—	—	1365	—	$21^m 20^s$;
13	—	—	—	5461	—	$1^h 25^m 20^s$.

« De même, 25 anneaux exigeraient plus de 349 500^m; par conséquent, pour démonter un baguenodier de 25 anneaux, il faudrait, à raison de 10 heures par jour, plus de 582 jours. »

MARCHE ACCÉLÉRÉE.

Nous avons encore donné, dans le tableau final, une colonne N qui indique le nombre des déplacements dans la marche accélérée. Ce tableau fait voir que la marche accélérée est soumise aux règles suivantes :

1° Lorsque l'on monte le premier anneau, on doit monter en même temps le second;

2° Lorsque l'on a monté les deux premiers anneaux, on doit ensuite baisser le premier.

Le tableau montre, de plus, que huit coups consécutifs de la marche ordinaire, de 1 à 8, de 9 à 16, ..., correspondent à six dans la marche accélérée; par conséquent, si q désigne le quotient, et $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ou 0 le reste de la division de n par 8, on a le tableau suivant de correspondance

$$
\begin{array}{ll}
n = 8q + 1,2, & N = 6q + 1, \\
n = 8q + 3,4,5, & N = 6q + 2,3,4, \\
n = 8q + 6,7, & N = 6q + 5, \\
n = 8q. & N = 6q.
\end{array}
$$

Il sera facile de déterminer, dans la marche accélérée, le nombre de coups nécessaires pour passer d'une position à une autre. En particulier, si l'on désigne par Q_n le nombre des déplacements dans le montage ou dans le démontage accéléré, on trouve, suivant que n est impair et égal à $2k+1$, ou pair, et égal à $2k$,

$$Q_{2k+1} = 2^{2k} \quad \text{et} \quad Q_{2k} = 2^{2k-1} - 1,$$

résultat obtenu par M. Parmentier par une voie différente.

On trouvera encore que l'expression

$$3 . 2^{n-2} - 1$$

représente le nombre des coups qui correspondent à l'état le plus compliqué du baguenaudier de n anneaux dans la marche accélérée.

TABLEAU DES DEUX MARCHES DU BAGUENAUDIER.

Les seize premiers coups.

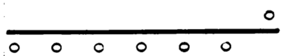
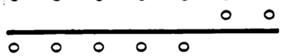
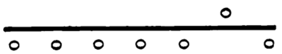
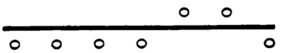
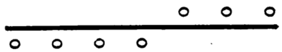
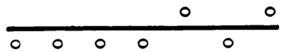
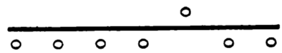
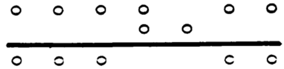
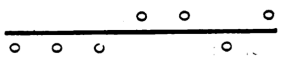
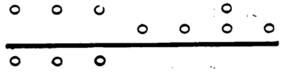
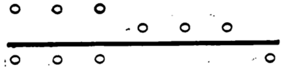
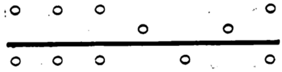
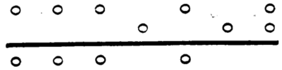
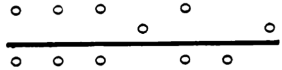
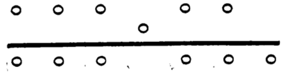
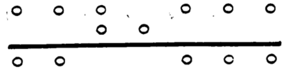
N.	*n.*	BAGUENAUDES.	BINAIRES.
1	1		0 0 0 0 0 0 1
	2		0 0 0 0 0 1 0
2	3		0 0 0 0 0 1 1
3	4		0 0 0 0 1 0 0
4	5		0 0 0 0 1 0 1
5	6		0 0 0 0 1 1 0
	7		0 0 0 0 1 1 1
6	8		0 0 0 1 0 0 0
7	9		0 0 0 1 0 0 1
	10		0 0 0 1 0 1 0
8	11		0 0 0 1 0 1 1
9	12		0 0 0 1 1 0 0
10	13		0 0 0 1 1 0 1
11	14		0 0 0 1 1 1 0
	15		0 0 0 1 1 1 1
12	16		0 0 1 0 0 0 0

TABLEAU DES DEUX MARCHES DU BAGUENAUDIER.

Les quinze derniers coups.

N.	*n.*	BAGUENAUDES.	BINAIRES.
85	113	o · · o · · o ——— · o o · o o ·	1 1 1 0 0 0 1
	114	o · · o · o o ——— · o o · o · ·	1 1 1 0 0 1 0
86	115	o · · o · o · ——— · o o · o · o	1 1 1 0 0 1 1
87	116	o · · o o o o ——— · o o · · · ·	1 1 1 0 1 0 0
88	117	o · · o o · o ——— · o o · · o ·	1 1 1 0 1 0 1
89	118	o · · o o · o ——— · o o · · o o	1 1 1 0 1 1 0
	119	o · · o o · · ——— · o o · · o o	1 1 1 0 1 1 1
90	120	o · · · o · · ——— · o o o · o o	1 1 1 1 0 0 0
91	121	o · · · o · o ——— · o o o · o ·	1 1 1 1 0 0 1
	122	o · · · o o o ——— · o o o · · ·	1 1 1 1 0 1 0
92	123	o · · · o o · ——— · o o o · · o	1 1 1 1 0 1 1
93	124	o · · · · o · ——— · o o o o · o	1 1 1 1 1 0 0
94	125	o · · · · o o ——— · o o o o · ·	1 1 1 1 1 0 1
95	126	o · · · · · o ——— · o o o o o ·	1 1 1 1 1 1 0
	127	o · · · · · · ——— · o o o o o o	1 1 1 1 1 1 1